Problemas
(Muestra)

Problema 1.

Resolver las siguientes cuestiones de divisibilidad:

a) *En una batalla en la que participaron entre 10000 y 11000 soldados, resultaron muertos* $\frac{23}{165}$ *del total, y heridos* $\frac{35}{143}$ *del total. Hallar cuántos resultaron ilesos.*

b) *Hallar el número* $2^n \cdot 5^m$ *sabiendo que la suma de todos sus divisores es 961.*

(Andalucía 1989)

Solución:

a) Consideremos N el número total de soldados que participaron en la batalla. Sabemos que $10000 < N < 11000$. Además como sabemos que el número de soldados muertos y heridos es un número entero, tenemos que $23 \cdot N$ y $35 \cdot N$ debe ser divisible por 165 y por 143.

- Como $m.c.d(23, 165) = 1 \Rightarrow N$ debe ser múltiplo de 165.
- Como $m.c.d(35, 143) = 1 \Rightarrow N$ debe ser múltiplo de 143.

Por lo tanto, N debe ser múltiplo del $m.c.m(143, 165)$

$$\left.\begin{array}{r} 143 = 11 \cdot 13 \\ 165 = 3 \cdot 5 \cdot 11 \end{array}\right\} m.c.m(143,165) = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 = 2145$$

Luego, N será el múltiplo de 2145 que esté entre 10000 y 11000, que es $N = 5 \cdot 2145 = 10725$. De este modo tenemos que 10725 soldados fueron a la batalla.

Determinemos el número de soldados ilesos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{N}^{\text{o}} \text{ soldados muertos:} \frac{23}{165} \text{ de } 10725 = \frac{23 \cdot 10725}{165} = 1495 \\ \\ \text{N}^{\text{o}} \text{ soldados heridos:} \frac{35}{143} \text{ de } 10725 = \frac{35 \cdot 10725}{143} = 2625 \end{array}\right\} \text{Total: } 1495 + 2625 = 4120 \text{ Soldados}$$

El número de soldados ileso fue $10725 - 4120 = 6605$.

$b)$ Determinemos la suma de todos los divisores el número $2^n \cdot 5^m$ con ayuda de la siguiente tabla, en la que la última columna representa la suma de los divisores de esa fila, que están progresión aritmética de primer elemento $1, 5, 5^2, ...$ y razón 2

	1	2	2^2	...	2^n	
1	1	2	4	...	2^n	$\frac{2^{n+1}-1}{2-1}$
5	5	10	20	...	$5 \cdot 2^n$	$5 \cdot \left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right)$
5^2	25	$2 \cdot 5^2$	$2^2 \cdot 5^2$	...	$2^n \cdot 5^2$	$5^2 \cdot \left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
5^m	5^m	$2 \cdot 5^m$	$2^2 \cdot 5^m$	...	$2^n \cdot 5^m$	$5^m \cdot \left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right)$

Si sumamos todos los elementos de la última columna obtenemos que la suma de todos los divisores de $2^n \cdot 5^m$ es:

$$\left(\frac{5^{m+1}-1}{5-1}\right) \cdot \left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right) = 961 = 31^2$$

en donde ambos factores son números enteros al ser suma de números enteros. Tenemos, por tanto, las siguientes posibilidades:

$$\text{a)} \begin{cases} 2^{n+1} - 1 = 31 \Rightarrow 2^{n+1} = 32 \Rightarrow n = 4 \\ \\ \dfrac{5^{m+1} - 1}{4} = 31 \Rightarrow 5^{m+1} - 1 = 124 \Rightarrow 5^{m+1} = 125 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 2^{n+1} - 1 = 961 \Rightarrow 2^{n+1} = 962 \Rightarrow \text{No existe} \\ \\ \dfrac{5^{m+1} - 1}{4} = 4... \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 2^{n+1} - 1 = 2 \Rightarrow 2^{n+1} = 2 \Rightarrow n = 0 \\ \\ \dfrac{5^{m+1} - 1}{4} = 961 \Rightarrow 5^{m+1} - 1 = 3848 \Rightarrow 5^{m+1} = 3845 \Rightarrow \text{No existe} \end{cases}$$

Por tanto, la es solución $2^4 \cdot 5^2$.

Número y suma de los divisores de un número natural:
Si $n = p_1^{k_1} \cdot ... \cdot p_r^{k_r}$ es la factorización canónica de un número natural $n > 1$, entonces:

- El número de divisores de n es

$$\tau(n) = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot ... \cdot (k_r + 1)$$

- La suma de todos los divisores de n es

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot ... \cdot \frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1}$$

□

Problema 2.

Se considera el polinomio con coeficientes complejos:

$$P(z) = z^3 + (-6+5i)z^2 + (9-24i)z + 18 + 13i$$

a) Calcule $a, b, c \in \mathbb{C}$ para que $P(z) = (z+i)(az^2+bz+c)$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

b) Resuelve la ecuación $p(z) = 0$.

c) Dibuje en el plano complejo el triángulo cuyos vértices son los afijos A_1, A_2 y A_3 de las soluciones de la ecuación del apartado b).

d) ¿Qué tipo de triángulo es?

(Andalucía 2014)

Solución:

a) Basta con realizar la división $P(z) : (z+i)$. Apliquemos el método de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -6+5i & 9-24i & 18+13i \\ -i & & -i & 6i+4 & -18-13i \\ \hline & 1 & -6+4i & 13-18i & 0 \end{array}$$

Por tanto, $P(z) = (z+i)[z^2 + (-6+4i)z + (13-18i)]$ Luego,

$$a = 1 \quad b = -6+4i \quad c = 13-18i$$

b) $P(z)$ es un polinomio con coeficientes complejos. Por tanto, tiene tres raíces contando sus multiplicidades. Calculemos las dos raíces que faltan.

$$z^2 + (-6+4i)z + (13-18i) = 0$$

$$z = \frac{6-4i \pm \sqrt{(-6+4i)^2 - 4(13-18i)}}{2} = \frac{6-4i \pm \sqrt{36-16-48i-52+72i}}{2}$$

$$= \frac{6-4i \pm \sqrt{-32+24i}}{2} = 3-2i \pm \sqrt{-8+6i} \overset{(1)}{=} 3-2i \pm (1+3i) = \begin{cases} 4+i \\ 2-5i \end{cases}$$

(1) Calculemos $\sqrt{-8+6i}$

$$\sqrt{-8+6i} = a+bi \Leftrightarrow -8+6i = (a+bi)^2 \Leftrightarrow -8+6i = a^2-b^2+2abi$$

tenemos entonces el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -8 = a^2-b^2 \\ 6 = 2ab \\ |\sqrt{-8+6i}|^2 = |a+bi|^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8 = a^2-b^2 \quad (1) \\ 6 = 2ab \quad (2) \\ 10 = \sqrt{64+36} = a^2+b^2 \quad (3) \end{cases}$$

Sumando (1) y (3) obtenemos que $2a^2 = 2$ y, por tanto, $a = \pm 1$. Luego $b = \pm 3$.

De las cuatro posibles soluciones, sustituimos en (2) para ver cuáles lo cumplen. Las soluciones son:

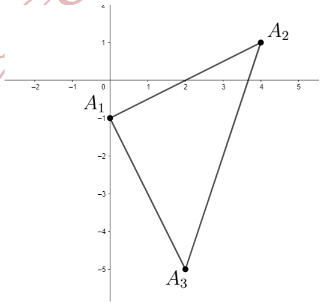
$$\begin{cases} a = 1 \quad b = 3 \\ a = -1 \quad b = -3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{-8+6i} = \begin{cases} 1+3i \\ -1-3i \end{cases}$$

Luego las soluciones de $P(z) = 0$ son:

$$z_1 = -i \quad z_2 = 4+i \quad z_3 = 2-5i$$

c) Los afijos son:

$$A_1 = (0,-1) \quad A_2 = (4,1) \quad A_3 = (2,-5)$$



d) Vamos a clasificar el triángulo según sus lados y según sus ángulos:

- **Según sus lados:**

$$\overline{A_1A_2} = |A_2 - |A_1| = |4+i-(-i))| = |4+2i| = \sqrt{20}$$

$$\overline{A_1A_3} = |A_3 - |A_1| = |2-5i-(-i))| = |2-4i| = \sqrt{20}$$

$$\overline{A_2A_3} = |A_3 - |A_2| = |4+i-(2-5i)| = |2+6i| = \sqrt{40}$$

Se trata, por tanto, de un triángulo isósceles.

- **Según sus ángulos:**

Como $\overline{A_1A_2} = \overline{A_1A_3}$, vamos a determinar en primer lugar el ángulo de A_1. Para ello, veremos qué ángulo θ hay que girar al punto A_3, con centro A_1, para obtener A_2.

$$(z_3 - z_1)e^{\theta i} + z_1 = z_2$$

$$[2-5i-(-i)]e^{\theta i} - i = 4+i$$

$$(2-4i)e^{\theta i} = 4+2i$$

$$e^{\theta i} = \frac{4+2i}{2-4i} = \frac{(4+2i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)} = \frac{20i}{4+16} = i = 1_{\frac{\pi}{2}}$$

Por tanto, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ y el ángulo de A_1 es un ángulo recto. Luego el triángulo es un triángulo rectángulo.

Giro con números complejos

Sean $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y A, A_1 y A_2 los afijos de z, z_1 y z_2 respectivamente.
Un giro de centro A y angulo θ transforma el punto A_1 en el punto A_2 de acuerdo a la siguiente operación:

$$(z_1 - z)e^{\theta i} + z = z_2$$

$$e^{\theta i} = (cos\ \theta + i \cdot sen\ \theta)$$

□

Problema 3.

Calcule el valor del siguiente determinante de orden $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \dots & \frac{1}{1!} \end{vmatrix}$$

(Aragón 2014 y Melilla 2018)

<u>Solución:</u>

Para los primeros valores de $n \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$A_1 = \frac{1}{1!} = 1 \quad A_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 1 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!} \quad A_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!}$$

Sospechamos, por tanto, que

$$A_n = \frac{1}{n!} \quad n \in \mathbb{N}$$

Hagamos la prueba por inducción. Supongamos que es cierto para todo $n \leq k-1$ siendo $k \geq 2$. Veamos que se cumple para $n = k$.

Al desarrollar A_k por la primera fila tenemos:

$$A_k = \frac{1}{1!} \cdot A_{k-1} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{1!} & 1 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{k!} & \frac{1}{(k-2)!} & \frac{1}{(k-3)!} & \dots & \frac{1}{1!} \end{vmatrix}$$

Ahora, desarrollamos este último determinante de orden $k-1$ por la primera fila, obteniendo:

$$A_k = A_{k-1} - \frac{1}{2!} A_{k-2} + \begin{vmatrix} \frac{1}{3!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{1!} & 1 & \dots & 0 \\ \frac{1}{5!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{k!} & \frac{1}{(k-3)!} & \frac{1}{(k-4)!} & \dots & \frac{1}{1!} \end{vmatrix}$$

siendo este un determinante de orden $k-2$. Si llamamos B_n al siguiente determinante de orden n, para $n = 1, 2, ..., k-1$

$$B_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{(k-n+1)!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{(k-n+2)!} & \frac{1}{1!} & 1 & \dots & 0 \\ \frac{1}{(k-n+3)!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{k!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \dots & \frac{1}{1!} \end{vmatrix}$$

Aplicando el razonamiento recurrente hasta el final, obtenemos:

$$\begin{aligned} A_k &= A_{k-1} - B_{k-1} = A_{k-1} - \frac{1}{2!}A_{k-2} + B_{k-2} = A_{k-1} - \frac{1}{2!}A_{k-2} + \frac{1}{3!}A_{k-3} - B_{k-3} \\ &= \cdots = A_{k-1} - \frac{1}{2!}A_{k-2} + \frac{1}{3!}A_{k-3} - ... + \frac{(-1)^{k-2}}{(k-1)!}A_1 + (-1)^{k-1}B_1 \end{aligned}$$

Como por hipótesis de inducción, $A_n = \dfrac{1}{n!}$ si $n = 1, ..., k-1$ y $B_1 = \dfrac{1}{k!}$, resulta que:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{1!(k-1)!} - \frac{1}{2!(k-2)!} + \frac{1}{3!(k-3)!} - ... + \frac{(-1)^{k-2}}{(k-1)!1!} + \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \\ &= \frac{1}{k!}\left[\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - ... + (-1)^{k-2}\binom{k}{k-1} + (-1)^{k-1}\binom{k}{k}\right] \end{aligned}$$

Dado que

$$0 = (1-1)^k = \binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - ... + (-1)^k\binom{k}{k} = \binom{k}{0} - \left[\binom{k}{1} - \binom{k}{2} - ... + (-1)^{k-1}\binom{k}{k}\right]$$

deducimos que

$$A_k = \frac{1}{k!}\cdot\binom{k}{0} = \frac{1}{k!}$$

Probando así que $A_n = \dfrac{1}{n!}$ $\square$