Tema 14

Ecuaciones. Resolución de ecuaciones. Aproximación numérica de raíces.

Índice

1. Introducción

En las primeras civilizaciones como la griega, la babilónica o la egipcia, existían algunos problemas que no hacían cuestión a una cantidad fija, pudiéndose considerar este tipo de problemas como antecedentes muy remotos de las ecuaciones. Sin embargo, la primera civilización que trató la ecuaciones de primer grado de forma más rigurosa fue la civilización árabe en el siglo IX de la mano de Al-Kowarizmi en su obra *"Al-jabr w'al-muqawallah"*. En este obra es donde aparecen por primera vez las fórmulas generales de resolución de las ecuaciones de primer y segundo grado.

La dificultad de las ecuaciones se produjo al intentar resolver ecuaciones de grado mayor que 2, a lo cuál dedicaron su esfuerzos bastantes matemáticos italianos del siglo XVI. Nicolo Fontana consigue la fórmula de resolución general a partir de un desafío de un colega, y Ludovico Ferrari logra resolver la cuártica utilizando el método de Tartaglia como auxiliar. En esta época la invención de lo símbolos algebraicos fue gradual, asociando gran parte de la notación simbólica de las ecuaciones a Vieté.

2. Ecuaciones

Entendemos por **ecuación** con una incógnita en un cuerpo $\mathbb{K}$ a toda expresión de la forma $f(x) = 0$ donde $f(x)$ es una función de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$ y 0 es el elemento nulo de la ley de composición interna en $\mathbb{K}$, siendo x la variable independiente o **incógnita**.

Consideraremos a lo largo del tema las ecuaciones en el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$, aunque el carácter del resultado puede ser más general.

Llamamos **solución** de una ecuación $f(x) = 0$ a todo elemento del cuerpo $\alpha \in \mathbb{K}$ que verifique que $f(\alpha) = 0$.

2.1. Tipos de ecuaciones

Las ecuaciones se clasifican atendiendo al tipo de función $f(x)$ del que proceden. Pueden ser:

- **Algebraicas:** cuando en la función $f(x)$ la variable independiente x está sometida una o varias veces a un número finito de operaciones suma, resta, multiplicación, división, potenciación de exponente natural y radicalización. A su vez, las podemos clasificar como:
  - **Racionales:** cuando x no aparece ninguna vez bajo el signo radical. Pueden ser, a su vez:
    - ⋆ **Enteras:** cuando x no aparece como divisor.
    - ⋆ **Fraccionarias:** cuando x está en el divisor.
  - **Irracional:** cuando x aparece bajo el signo radical.
- **Trascendentes:** cuando no son algebraicas.

En resumen:

$$\textbf{Ecuaciones}\begin{cases}\text{Algebraicas}\begin{cases}\text{Racionales}\begin{cases}\text{Enteras} & x^2+x+1=0\\ \text{Fraccionarias} & \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{5}{2x}=0\end{cases}\\ \text{Irracionales} \quad \sqrt{x+5}-8=0\end{cases}\\ Tanscendentes \quad 3^x-8=0\end{cases}$$

2.2. Ecuaciones equivalentes

Definición. *Dos ecuaciones se dicen* ***equivalentes*** *cuando toda solución de la primera es solución de la segunda y viceversa.*

Para obtener ecuaciones equivalentes a una dada, podemos realizar transformaciones del tipo sumar o multiplicar por un número distinto de cero en ambos miembros de la igualdad.

Si elevamos ambos miembros a la misma potencia, obtenemos otra ecuación con todas la raíces de la primera ecuación y, quizás, alguna más.

3. Ecuaciones polinómicas

En este apartado nos encargaremos de la resolución de ecuaciones polinómicas en $\mathbb{R}$. No obstante, comentaremos aspectos importantes de las soluciones complejas de este tipo de ecuaciones.

Definición. *Se llama* ***ecuación polinómica*** *de grado n ($n \in \mathbb{N}$) con una incógnita x a la ecuación que se reduce a la forma*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

con $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$.

Desde el punto de vista de los polinomios, el concepto de solución de una ecuación polinómica coincide con el concepto de raíz del polinomio. Utilizaremos ambos términos a lo largo del tema.

Estudiemos las soluciones de una ecuación polinómica dependiendo del grado del polinomio asociado.

3.1. Ecuación de primer grado o lineal

Una ecuación de primer grado siempre se puede escribir de la forma

$$ax + b = 0$$

por lo que trivialmente su solución será $x = -\dfrac{b}{a}$.

3.2. Ecuación de segundo grado o cuadrática

La forma general de una ecuación de segundo grado es

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Con objeto de determinar las raíces de la misma, es decir, la fórmula mediante la cuál son determinadas las soluciones, efectuamos el siguiente proceso:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$
$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$
$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$
$$(2ax + b)^2 = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Acabamos de deducir la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado.

El número de soluciones reales de esta ecuación depende del valor $b^2 - 4ac$, que llamamos **discriminante**, y lo denotamos Δ.

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una única solución real doble.
- Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

Si consideramos la ecuación en el cuerpo $\mathbb{C}$ es evidente que la ecuación siempre tiene dos soluciones complejas pues en dicho cuerpo podemos calcular raíces cuadradas de números negativos.

Ecuaciones bicuadradas:

Una ecuación bicuadrada tiene la forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

si en ella efectuamos el cambio de variable $t = x^n$, obtenemos la ecuación cuadrática $at^2+bt+c = 0$, que ya sabemos resolver. Para cada solución t de esta ecuación, las raíces de la ecuación bicuadrada vendrán dadas por la fórmula:

$$x = \sqrt[n]{t}$$

3.3. Ecuaciones de tercer y cuarto grado

A las ecuaciones de tercer grado también se les conoce como **cúbicas** y tienen la forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Para determinar la fórmula de resolución, podemos suponer que $a = 1$ sin más que dividir toda la ecuación por a. Así pues tenemos

$$x^3 + a'x^2 + b'x + c = 0$$

Haciendo el cambio de variable

$$x = x' - \frac{a'}{3}$$

obtenemos una ecuación sin término de grado dos

$$x'^3 + px' + q = 0$$

Haciendo ahora el cambio de variable $x' = u + v$ y agrupando términos obtenemos que:

$$\begin{aligned}(u+v)^3 + p(u+v) + q &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q \\ &= (u^3+v^3) + 3uv(u+v) + p(u+v) + q \\ &= (u^3+v^3) + (3uv+p)(u+v) + q = 0\end{aligned}$$

Exigiendo la condición $3uv + p = 0$, es decir, $3uv = -p$, tenemos que $u^3 + v^3 = -q$. Por tanto,

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \qquad u^3 + v^3 = -q$$

Haciendo uso de las Fórmulas de Cardano-Vieté, que veremos más adelante, tenemos que u^3 y v^3 son las raíces de

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$$

Obteniendo los valores de u^3 y v^3, tenemos los de u y u. Deshaciendo los cambios de variable se obtienen las soluciones de nuestra ecuación original.

En la ecuaciones de cuarto grado, también existe fórmula para obtener la solución. Sin embargo, en el primer tercio del siglo XIX, los matemáticos Abel y Galois probaron que no existe un método para calcular la solución de una ecuación polinómica de grado mayor o igual que 5.

3.4. Ecuación general polinómica

3.4.1. Raíces racionales de una ecuación polinómica con coeficientes enteros

Paolo Ruffini fue otro gran matemático implicado en la demostración de que las ecuaciones de grado superior a 4 no eran resolubles en general, aunque no llegara a culminar la demostración de este hecho. Sin embargo, de sus investigaciones surgió el método de división que lleva su nombre, que puede servir para encontrar divisores de primer grado de un polinomio, o lo que es lo mismo, soluciones de su ecuación asociada.

Proposición. *Es condición necesaria y suficiente para que $x = r$ sea solución de la ecuación polinómica*

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$$

que $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ sea divisible por $x - r$.

Demostración.

Como $P(x) = (x-r)Q(x)+R$, se tiene que si $x = r$ es raíz del $P(x)$, entonces $Q(r)(r-r)+R = 0$, lo que implica que $R = 0$.

Recíprocamente, si $P(x)$ es divisible por $x - r$ entonces tenemos $P(x) = (x - r)Q(x)$ y, por tanto, $P(r) = (r - r)Q(r) = 0$. Luego r es raíz de $P(x)$. □

Si tenemos entonces una ecuación polinómica de grado superior a cuatro podemos probar a buscar una solución por el método de Ruffini, probando a dividir hasta que el resto nos de 0.

Sin embargo, esto no es en absoluto práctico cuando los coeficientes del polinomio son números racionales si no sabemos nada sobre las soluciones buscadas. El siguiente resultado nos permitirá determinar también la raíces racionales de la ecuación si existen.

Teorema. *Si $\dfrac{p}{q}$ es una raíz racional irreducible de $P(x) = a_nx^n + +a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, entonces q divide a a_n y p divide a a_0.*

Demostración.
Sea $\frac{p}{q}$ con p y q primos entres sí, una raíz de $P(x)$. Sustituyendo en $P(x)$ tenemos:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + ... + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

de donde deducimos que:

$$a_np^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1})$$

$$a_0q^n = -p(a_np^{n-1} + ... + a_1q^{n-1})$$

Como $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n, p, q$ son números enteros, entonces $\frac{a_np^n}{q}$ y $\frac{a_0q^n}{p}$ son números enteros y como p y q son primos entre sí, q divide a a_n y p divide a a_0. □

Cuando la ecuación algebraica tiene coeficientes racionales, es posible que alguna de sus raíces sea racional. Si multiplicamos todos los coeficientes por el mínimo común múltiplo de los denominadores, obtendremos una ecuación algebraica con todos sus coeficientes enteros. Aplicando el teorema anterior podríamos encontrar las soluciones racionales.

Definición. *Diremos que que una ecuación polinómica $P(x) = 0$ tiene a r como* ***raíz múltiple de orden*** *m si existe $Q(x)$ polinomio de grado $n - m$ tal que*

$$P(x) = (x - r)^mQ(x)$$

con $Q(r) \neq 0$.

3.4.2. Teorema Fundamental del Álgebra

El Teorema fundamental del álgebra establece que todo polinomio con coeficientes complejos (en particular reales) tiene al menos una raíz que puede ser real o compleja. Como consecuencia del teorema tenemos el siguiente resultado

Proposición. *Una ecuación algebraica de grado n tiene exactamente n raíces en el cuerpo de los números complejos, contadas cada una con el orden de su multiplicidad.*

Además de que el número de soluciones entre reales y complejas es n, las complejas se presentan a pares, es decir, si un número complejo $z = a+bi$ es solución, entonces su conjugado $\overline{z} = a-bi$ también. Por tanto, si el polinomio es de grado impar, tiene al menos una raíz real.

3.4.3. Fórmulas de Cardano-Vieté

Sea $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 \in \mathbb{C}$ un polinomio de grado n $(a_n \neq 0)$ y sean $r_1, r_2, ..., r_n \in \mathbb{C}$ todas las raíces de $P(x)$. Llamando $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ a las *funciones elementales de las raíces* se tiene que:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i = r_1 + ... + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$
$$\sigma_2 = \sum_{i<j} r_i r_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$
$$\sigma_3 = \sum_{i<j<k} r_i r_j r_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$
$$\vdots$$
$$\sigma_n = r_1 r_2 ... r_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$$

4. Otras ecuaciones

Ya hemos explicado al principio del tema que una ecuación $f(x) = 0$ se clasifica según el tipo de función $f(x)$. Hagamos ahora un resumen de los tipos de ecuaciones más comunes y sus métodos de resolución, que pasan todos por convertir la ecuación inicial en algebraica.

– **Ecuaciones Racionales**. Si $f(x)$ está compuesta por fracciones algebraicas, hallando el $m.c.m$ de los denominadores podemos convertir todas las fracciones a un denominador común, obteniendo una única función $g(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ cuyas soluciones serán las soluciones de $P(x)$ y habremos convertido la ecuación inicial en algebraica.

– **Ecuaciones Irracionales** Si $f(x)$ es irracional, despejando secuencialmente las raíces que contengan la incógnita para luego elevar ambos miembros de la ecuación al índice de la raíz. Con esto se conseguirá convertir la ecuación inicial en dos miembros que serán ambos polinomios, luego la ecuación inicial se convertirá en algebraica.

– **Ecuaciones exponenciales**. Aplicando las propiedades de las potencias, se debe consigue que todas las potencias en cuyo exponente aparezca la incógnita, acaben teniendo igual base e igual exponente. Entonces se aplica un cambio de variable como antes: la potencia única que acabamos de mencionar es igual a la nueva incógnita, lo que convertirá la ecuación en una racional o en algebraica directamente.

– **Ecuaciones logarítmicas**. Se aplica exactamente el mismo método que en las exponenciales, solo que aplicando las propiedades de los logaritmos, así que en lugar de conseguir una potencia única para aplicar un cambio de variable, se consigue un logaritmo único. Puede ocurrir que, en ocasiones, se pueda convertir la ecuación logarítmica en exponencial, aplicando la relación entre logaritmo y potencia.

– **Ecuaciones trigonométricas**. Para resolverlas, se usan las fórmulas de trigonometría para lograr que la ecuación contenga una única razón trigonométrica afectando a la incógnita. Entonces se aplica un cambio de variable consistente en decir que la incógnita es esa razón trigonométrica única. Hecho esto se tendrá una ecuación con una incógnita afectada exclusivamente por operaciones algebraicas, es decir, se tendrá una ecuación de alguno de los tipos anteriores, y se le aplicará el método que corresponda. O será algebraica directamente.

5. Aproximación numérica de raíces de una ecuación cualquiera

Distingamos dos etapas de resolución aproximadas de estas ecuaciones:

a) Localizar las raíces o separarlas, que consiste en encontrar en encontrar un intervalo en el que solamente haya una raíz o solución.

b) Aproximar la raíz en dicho intervalo, que consiste en tomar como valor aproximado de una raíz α de f, el valor $a \in D$. Llamamos **error de aproximación** a $e = |a - \alpha|$.

5.1. Separación de raíces

Los siguientes resultados nos permiten encontrar un intervalo en el que la ecuación tenga una única solución.

Teorema. *(**Teorema de Bolzano**) Si una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida y es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe al menos un valor $c \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$.*

Proposición. *Se f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable con derivada de signo constante en (a, b). Entonces:*

a) Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f(x) = 0$ tiene una única raíz en (a, b).

b) Si $f(a) \cdot f(b) > 0$,la ecuación no tiene ninguna raíz en (a, b).

Demostración.

a) Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, por el teorema de Bolzano, $\exists \alpha \in (a, b)$ de modo que $f(\alpha) = 0$. Como $f'(x)$ es de signo constante, tenemos que si $f'(x) > (<) \; 0$ en (a, b), entonces f es estrictamente creciente (decreciente) en (a, b) y $f(x) < (>) f(\alpha)$ $\forall\, x < \alpha$ y $f(x) > (<) f(\alpha)$ $\forall\, x > \alpha$.

b) Si $f(a) \cdot f(b) = 0$, suponiendo que $f'(x) > 0$, es decir, f creciente en (a, b), obtenemos que $f(a) < f(x) < f(b)$. Si $f(a)$ y $f(b)$ son positivas (negativas), también lo es $f(x)$ $\forall\, x \in (a, b)$.

□

Proposición. *Si f es continua y derivable en (a, b) y x_1 y x_2 son dos raíces consecutivas de $f'(x)$, entonces, a lo sumo, existe una raíz de $f(x)$ en (x_1, x_2).*

5.2. Aproximación de raíces

Para obtener una aproximación c de una raíz de $f(x) = 0$ se procede del siguiente modo:

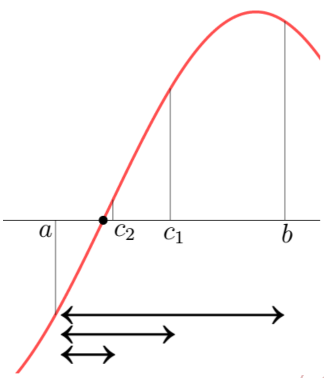
1º Localizamos un intervalo en el haya una única raíz con los métodos que acabamos de mencionar.

2º Calculamos con algún criterio del los que veremos a continuación un número c_1. A pesar de desconocer el valor α que cumple $f(\alpha) = 0$, podemos determinar si $|\alpha - c_1| \leq \varepsilon$. Si esto es cierto, tomamos como aproximación de α a c_1.

3º En caso contrario, elegimos otro valor c_2 y repetimos el segundo paso.

Existen distintos métodos para encontrar aproximaciones de raíces. Algunos de ellos son los siguientes:

Método de la bisección:



Una vez que tenemos localizada una única raíz de $f(x) = 0$ en un intervalo $[a, b]$ y que se verifica que $f(a) \cdot f(b) < 0$, consideramos

$$c_1 = \frac{a+b}{2}$$

Si $f(c_1) = 0$, hemos acabado y c_1 es la raíz. En caso contrario, la raíz α verificará que $\alpha \in (a, c_1)$ o $\alpha \in (c_1, b)$ dependiendo de si $f(a) \cdot f(c_1) < 0$ o $f(a) \cdot f(c_2) < 0$. Sea $[a_1, b_1]$ el nuevo intervalo en el que está α.
Fijado el error ε que estamos dispuesto a asumir, si $b_1 - a_1 \leq \varepsilon$, tomamos $\alpha = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$. En caso contrario repetimos el proceso hasta encontrar bien un valor c_p que sea raíz o un intervalo $[a_p, b_p]$ que tenga una longitud menor que ε.

Cota de error

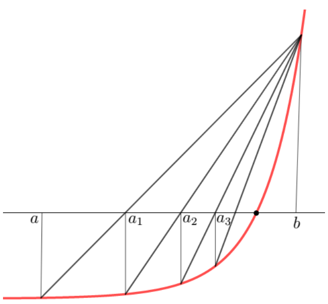
Por la forma del método, en el paso $n-$ésimo tenemos que la longitud del intervalo $[a_n, b_n]$ es

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Tomando como aproximación el punto medio del intervalo $c_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, tenemos que

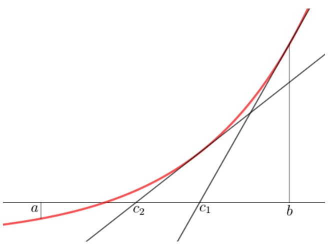
$$|\alpha - c_{n+1}| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Método de la Regula-Falsi:



Una vez que tenemos localizada una única raíz de $f(x) = 0$ en un intervalo $[a, b]$ y que se verifica que $f(a) \cdot f(b) < 0$, elegimos c_1 como la abscisa del punto de corte del eje OX con la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.
Si $f(c_1) = 0$ o $f(c_1)$ no nos da la aproximación requerida, repetimos el proceso con el intervalo $[a_1, c_1]$ o $[c_1, b_1]$ según sea $f(a) \cdot f(c_1) < 0$ o $f(a) \cdot f(c_1) < 0$.
Al contrario que en el método de la bisección, no podemos calcular la anchura del intervalo $[a_n, b_n]$. Aún así, una manera de parar el el proceso sería evaluar $f(c_n)$ y ver si $|f(c_n)| \leq \varepsilon$.

Método de Newton-Raphson o de las tangentes:



De nuevo, debemos localizar un intervalo $[a, b]$ en el que solamente haya una raíz de $f(x) = 0$. Además, en este método debemos exigir que f sea derivable en (a, b). La forma de proceder en este método es:
Elegimos uno de los extremos del intervalo $[a, b]$ que denotamos c. Consideramos la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ y tomamos como primera aproximación de α el punto de corte de dicha tangente con el eje OX, que llamaremos c_1.
La ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $(c, f(c))$ es

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

Al intersecar con el eje OX obtenemos que

$$c_1 = c - \frac{f(c)}{f'(c)}$$

Procediendo sucesivamente obtenemos una sucesión de puntos $\{c_n\}$ tales que

$$c_n = c_{n-1} - \frac{f(c_{n-1})}{f'(c_{n-1})}$$

El siguiente teorema nos establece las condiciones bajo las cuáles $\{c_n\} \longrightarrow \alpha$.

Teorema. *Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[a, b]$ que verifica:*

- *$f(x)$ tiene una sola raíz en $[a, b]$*
- *$f(a) \cdot f(b) < 0$*
- *f es derivable, al menos, hasta el orden 2*
- *$f'(x) \neq 0 \ \forall \ x \in (a, b)$*
- *$f''(x)$ es de signo constante en (a, b)*

y tomando como extremo c aquel que verifica que signo $f(c) =$ signo f'', entonces la sucesión $\{c_n\}$ construida anteriormente verifica que $\{c_n\} \longrightarrow \alpha$

Método de la aplicación contractiva:

Definición. *Una aplicación g definida en $[a, b]$ se dice* ***contractiva*** *cuando:*

a) *g es derivable en (a, b)*

b) *$\exists \ k \in (0, 1)$ tal que $|g'(x)| < k \ \forall \ x \in (a, b)$*

Veamos en qué consiste este método:

Dada una ecuación $f(x) = 0$ en un intervalo $[a, b]$, obtenemos una ecuación de la forma $x = g(x)$. Tomamos un valor $c \in [a, b]$ construimos la sucesión $c_1 = g(c)$, $c_2 = g(c_1)$,... Esta sucesión $\{c_n\}$ verifica:

Proposición. *Si $f(x)$ tiene una única raíz en $[a,b]$ y $g(x)$ es contractiva, entonces $\forall\ c \in [a,b]$, la sucesión $\{c_n = g(c_{n-1})\} \longrightarrow \alpha$.*

Cota de error

Sea α la raíz de $f(x) = 0$ y, por tanto, el punto fijo $\alpha = g(\alpha)$. Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial tenemos que

$$g'(x_2) = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_0} \text{ con } x_2 \in (x_0, x_1)$$

por tanto,

$$g(x_1) - g(x_0) = g'(x_2)(x_1 - x_0) < k(x_1 - x_0)$$

luego

$$|c_{n+1} - \alpha| = |g(c_n) - g(\alpha)| < k|c_n - \alpha| = k|g(c_{n-1} - g(\alpha))| < k^2|c_{n-1} - \alpha| = ... < k^{n+1}|b - a|$$

6. Aproximación de raíces de una ecuación polinómica

Como las funciones polinómicas son funciones derivables hasta cualquier orden, todo el estudio de acotación y aproximación visto anteriormente es válido para polinomios.

No obstante, veamos otros métodos específicos para ecuaciones polinómicas.

6.1. Acotación de raíces

Supongamos que el polinomio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ con coeficientes enteros no tiene raíces racionales, pues podríamos haberla encontrado con la teoría ya vista.

Acotar las raíces de una ecuación polinómica consiste en encontrar dos números reales M y m, de manera que todas las raíces de la ecuación se encuentren en el intervalo (m, M), es decir, que M sea cota superior de todas las raíces y m cota inferior de las mismas. Empezaremos por determinar la cota superior del conjunto de raíces de una ecuación algebraica para lo que existen varios métodos:

Método de acotación de Laguerre

Teorema. *Si al dividir el polinomio $P(x)$ por $x - a$ siendo $a > 0$, todos los coeficientes del polinomio cociente y resto son no negativos, entonces a es cota superior de las raíces de $P(x)$*

Demostración.

Por la división euclídea de polinomios tenemos que:

$$P(x) = C(x)(x - a) + r$$

Como $C(x)$ tiene todos sus coeficientes positivos, $C(x) > 0\ \forall\ x > 0$.

Como $a > 0$, si $x > a$ entonces $x - a > 0$, $C(x) > 0$ y $r > 0$. Por tanto, $P(x) > 0$ y a es cota superior de las raíces. $\square$

Método de Newton

Teorema. *Si a es tal que* $P(a)$, $P'(a)$, $P''(a)$,...,$P^{n)}(a)$ *son positivas, entonces a es cota superior de las raíces de* $P(x)$.

Para determinar una cota inferior, basta con tener en cuenta que la ecuación $P(-x) = 0$ tiene las raíces opuestas de $P(x) = 0$. Luego, si a es cota superior de las raíces de $P(-x)$, $-a$ será cota inferior de las raíces de $P(x) = 0$.

6.2. Separación de raíces

Veamos dos métodos para separar las raíces del polinomio.

Método de Sturm

Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros de grado n. Construyamos la sucesión siguiente: calculamos $P'(x)$ y efectuamos la división $P(x)$ entre $P'(x)$ siendo $Q_1(x)$ y $R_1(x)$ el cociente y el resto de la división. Llamamos $P_1(x) = -R_1(x)$. Ahora dividimos $P'(x)$ entre $P_1(x)$ y repetimos el proceso.

El método de Sturm dice que dado un polinomio $P(x)$, sin raíces múltiples en un intervalor $[a, b]$ tal que $P(a) \cdot P(b) \neq 0$, construimos la sucesión

$$\{P(x), P'(x), P_1(x), ..., P_n(x)\}$$

El número de raíces de $P(x) = 0$ en (a, b) es $V(a) - V(b)$ siendo

$$V(a) = Var\{P(a), P'(a), P_1(a), ..., P_n(a)\}$$

dónde Var indica las variaciones de signo del conjunto.

Si $P(x)$ tuviese raíces múltiples en $[a, b]$, $P'(x)$ también tendría esas raíces múltiples y serían raíces de $Q(x) = m.c.d(P(x), P'(x))$ y dividiendo por $Q(x)$ estamos en el caso anterior.

Método de Budan-Fourier

Teorema. *(**Teorema de Budan-Fourier**) Sea* $P(x)$ *un polinomio de grado* m *y* $a < b$ *con* $P(a) \cdot P(b) \neq 0$ *(ninguno raíz de* $P(x)$*). La cantidad de raíces reales de* $P(x)$ *contadas con su multiplicidad es menor o igual a* $S(a) - S(b)$*; y es congruente a este número módulo 2 (misma paridad), siendo*

$$S(a) = Var\{P(a), P'(a), ..., P^{n)}(a)\}$$

7. Bibliografía

- *Kincaid, D. y Cheney, W.. Análisis numérico. Ed. Adison-Wesley Iberoamericana.*
- *Delgado, F; Fuertes, C y Xambós, S. Introducción al álgebra. Vol I. Universidad Complutense de Madrid, 1993.*
- *Turnbull, H.W. Teoría de ecuaciones. Ed. Dossat. Madrid, 1964.*